Probabilidades y Estadística (C)

Ejercicio 1

Se tienen dos urnas numeradas 0 y 1. La urna 0 contiene 2 bolas blancas y 8 negras, mientras que la urna 1 contiene 7 bolas blancas y 3 negras. Se posee además una moneda que tiene probabilidad $\frac{1}{5}$ de salir cara al ser tirada. Se tira la moneda. Si sale cara se elige la urna 0, de lo contrario se elige la urna 1. A continuación se extraen de la urna elegida con reposicón 5 bolas.

a) Calcular la probabilidad de haber extraído exactamente una bola blanca.
b) Calcular la probabilidad de haber elegido la urna 0 si se extrajo exactamente una bola blanca.
c) Sea B_i="la i-ésima bola extraída es blanca". ¿Son B_1 y B_2 independientes?

Ejercicio 2

Don Carlos tiene un pequeño almacén en Almagro. Se dedica a vender entre otras cosas productos para celíacos, en particular sin gluten. El primer día de cada mes recibe de su distribuidor 3 bolsas de pan lactal sin gluten, que tienen vigencia hasta el último día de cada mes (luego pasan a estar vencidos y debe retirarlos de la venta). La cantidad de personas que solicitan ese producto durante el mes sigue un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 3$ bolsas por mes.

a) ¿Cuántas bolsas espera vender al cabo de un mes? ¿Cuál es la demanda esperada al cabo de un año?
b) Si Dos Carlos le paga al distribuidor $15 por cada bolsa y el precio de venta al público es de $35, ¿cuál es la probabilidad de que ese producto le produzca pérdida al cabo del mes?
c) Calcular la probabilidad de que en un año haya exactamente tres meses en los que no pueda cumplir con toda la demanda mensual.
d) El tiempo en días que tarda un cliente en consumir todo el producto desde que lo compra es una variable aleatoria Z con distribución $N(\mu, 2)$. Calcular la esperanza de Z sabiendo que
$$\int_{\mu}^{2\mu} f_Z(x)\, dx = 0.4901$$
siendo f_Z la función de densidad de dicha distribución.

Ejercicio 3

En una materia optativa de la facultad hay 6 alumnos inscriptos. La materia se da los martes y jueves de 17hs a 19hs. El horario de llegada X de uno de estos alumnos al curso se puede modelar con la siguiente función de densidad
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^3 - 1} e^{19-x} & \text{si } 16 \leq x \leq 19 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$
Supongamos además que los horarios de llegada de cada uno de los alumnos son independientes y tienen la misma distribución.

a) Calcular la probabilidad de que un alumno llegue tarde.
b) Calcular la probabilidad de que la clase comience con menos de la mitad de los alumnos.
c) La nota de concepto que tiene el alumno en la materia (nota que no aparece en ningún examen pero que no significa que no exista) depende del tiempo de llegada X.
    i. Suponga que la nota de concepto es

$$N_1(X) = \begin{cases} 10 & \text{si } X \leq 17 \\ 26 - X & \text{si } X > 17 \end{cases}$$

Calcular la nota de concepto esperada del alumno.

ii. Si la nota de concepto es ahora

$$N_2(X) = \frac{1}{9}e^{19-X} + 7$$

Hallar la función de densidad de la variable aleatoria $N_2(X)$. ¿Qué distribución conocida tiene?

Ejercicio 4

Se tiene una moneda que tiene probabilidad 0.60 de salir cara. Esta moneda se lanza tres veces de manera consecutiva. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de caras obtenidas en los tres lanzamientos, y sea Y la variable aleatoria que indica el número de cecas obtenidas antes de obtener la primera cara en los tres lanzamientos, si sale alguna, y en caso de que no sale ninguna cara toma el valor 3.

a) Hallar la función de probabilidad conjunta del vector (X, Y).
b) Hallar las funciones de probabilidad marginales de Xe Y.
c) Calcular $P((X - Y)^2 = 1\ )$

Ejercicio 5

Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme en el paralelogramo de vértices $(0; 0), (1; 1), (1; 2)$ y $(0; 3)$.

a) Determinar la función de densidad conjunta del vector (X, Y).
b) Calcular $P(Y \leq X^2 + 1)$
c) Hallar f_X y f_Y.
d) Calcular $P\left(X \leq \frac{1}{4} \mid Y = \frac{1}{2}\right)$